

Алгоритмы дискретной фильтрации на основе модифицированной взвешенной ортогонализации Грама – Шмидта для дискретных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами

А. В. ЦЫГАНОВ^{1,*}, Ю. В. ЦЫГАНОВА², А. Н. КУВШИНОВА¹, А. В. ГОЛУБКОВ¹

¹Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова, 432071, Ульяновск, Россия

²Ульяновский государственный университет, 432017, Ульяновск, Россия

*Контактный автор: Цыганов Андрей Владимирович, e-mail: andrew.tsyganov@gmail.com

Поступила 13 октября 2022 г., доработана 14 декабря 2022 г., принята в печать 21 декабря 2022 г.

Представлены новые LD-алгоритмы дискретной фильтрации для линейных дискретных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами. Предложены два алгоритма, основанные на LDL^T -разложении ковариационной и информационной матриц ошибок оценивания вектора состояния. Первый из этих алгоритмов представляет собой ковариационный LD-фильтр, а второй — информационный LD-фильтр. Оба фильтра имеют расширенную блочную форму, а их вычислительные схемы позволяют обновлять все необходимые величины фильтра с использованием численно устойчивой модифицированной взвешенной ортогонализации Грама – Шмидта (MWGS). Доказана алгебраическая эквивалентность LD-фильтров ковариационному и информационному алгоритмам калмановского типа для линейных дискретных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами. Численные эксперименты, проведенные в системе MATLAB, подтверждают теоретические выводы и демонстрируют работоспособность новых LD-алгоритмов дискретной фильтрации.

Ключевые слова: фильтр Калмана, дискретная система, стохастическая система, мультипликативный шум, дискретный LD-фильтр.

Цитирование: Цыганов А.В., Цыганова Ю.В., Кувшинова А.Н., Голубков А.В. Алгоритмы дискретной фильтрации на основе модифицированной взвешенной ортогонализации Грама – Шмидта для дискретных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами. Вычислительные технологии. 2023; 28(5):70–86. DOI:10.25743/ICT.2023.28.5.007.

Введение

Дискретными стохастическими системами с мультипликативными и аддитивными шумами описывается широкий класс математических моделей сложных систем в таких областях науки и техники, как производственно-технологические, энергетические, технические и экономические, телекоммуникационные, аэрокосмические системы, системы обработки изображений и др.

Важным классом алгоритмов обработки измерительной информации являются алгоритмы дискретной фильтрации калмановского типа [1]. Для дискретных линейных стохастических систем с аддитивными гауссовскими шумами существует широкий класс эффективных вычислительных методов дискретной фильтрации, основанных на различных методах факторизации ковариационных и информационных матриц ошибок оценивания [2]. Однако для дискретных линейных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами такие алгоритмы практически не представлены.

Цель настоящей работы состоит в построении новых алгоритмов дискретной фильтрации для указанного класса систем, основанных на численно устойчивой модифицированной взвешенной ортогонализации Грама–Шмидта (MWGS).

Рассмотрим дискретную линейную стохастическую систему с мультипликативными и аддитивными шумами:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = (F_{k-1} + \tilde{F}_{k-1}\xi_{k-1})\mathbf{x}_{k-1} + G_{k-1}\mathbf{w}_{k-1}, \\ \mathbf{z}_k = (H_k + \tilde{H}_k\zeta_k)\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \end{cases} \quad (1)$$

где $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $\mathbf{z}_k \in \mathbb{R}^m$ — вектор измерений, $F_k, \tilde{F}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $H_k, \tilde{H}_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $\mathbf{x}_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{x}}_0, \Pi_0)$ — начальное состояние, $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^q \sim \mathcal{N}(0, Q_k)$ — аддитивный шум в объекте, $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^m \sim \mathcal{N}(0, R_k)$ — аддитивный шум в измерителе, $\xi_k \in \mathbb{R} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\xi^2)$ — мультипликативный шум в объекте, $\zeta_k \in \mathbb{R} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\zeta^2)$ — мультипликативный шум в измерителе, $Q_k, R_k > 0$.

Перепишем систему (1), (2) в эквивалентной форме

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = F_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \tilde{\mathbf{w}}_{k-1}, \\ \mathbf{z}_k = H_k\mathbf{x}_k + \tilde{\mathbf{v}}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \end{cases} \quad (3)$$

где $\tilde{\mathbf{w}}_{k-1} = \tilde{F}_{k-1}\xi_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + G_{k-1}\mathbf{w}_{k-1}$, $\tilde{\mathbf{v}}_k = \tilde{H}_k\zeta_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$, $\mathbf{E}\{\mathbf{x}_k\mathbf{x}_k^T\} = X_k$, $\mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{w}}_k\} = 0$, $\mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{w}}_k\tilde{\mathbf{w}}_k^T\} = \tilde{Q}_k$, $\mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{v}}_k\} = 0$, $\mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{v}}_k\tilde{\mathbf{v}}_k^T\} = \tilde{R}_k$,

$$\begin{aligned} X_k &= F_{k-1}X_{k-1}F_{k-1}^T + \tilde{Q}_{k-1}, \\ \tilde{Q}_k &= \sigma_\xi^2\tilde{F}_kX_k\tilde{F}_k^T + G_kQ_kG_k^T, \\ \tilde{R}_k &= \sigma_\zeta^2\tilde{H}_kX_k\tilde{H}_k^T + R_k. \end{aligned}$$

Модифицированный метод ортогонализации Грама–Шмидта (MGS) предложен А. Бьёрком [3]. В отличие от классической ортогонализации Грама–Шмидта, данный метод более эффективен в вычислительном плане, при этом точность вычислений по методу MGS сравнима с точностью вычислений по методу триангуляризации Хаусхолдера.

Метод модифицированной взвешенной ортогонализации Грама–Шмидта (MWGS) впервые был предложен К. Торнтон [4] для вычисления UD-факторов ковариационной матрицы ошибок оценивания на этапе экстраполяции в UD-фильтре Дж. Бирмана [5] (см. теорему VI.4.1, с. 127). В алгоритме MWGS использовано свойство ортогональности r -векторов \mathbf{b}_i и \mathbf{b}_j относительно весовой диагональной матрицы D_w :

$$\mathbf{b}_i^T D_w \mathbf{b}_j = \begin{cases} \beta_i > 0, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Известны два основных вида разложения прямоугольной матрицы $A \in \mathbb{R}^{r \times s}$ с помощью метода MWGS: UD-разложение (обратная процедура MWGS) и LD-разложение (прямая процедура MWGS). Обратная процедура MWGS-ортогонализации, впервые предложенная К. Торнтон, приобрела широкую известность в области дискретной фильтрации стохастических систем [1, 5–7] и применяется для построения различных модификаций UD-фильтра Калмана, в том числе при решении ряда практических задач (см., например, [8–13]).

В недавней работе [14] предложен общий подход к построению алгоритмов дискретной фильтрации на базе MWGS-ортогонализации в классе дискретных линейных стохастических систем с аддитивными шумами, а также проведен подробный анализ вычислительных свойств построенных алгоритмов. Развивая и дополняя полученные ранее результаты [14], мы решаем задачу построения новых алгоритмов дискретной фильтрации ковариационного и информационного типа на базе модифицированной взвешенной ортогонализации Грама–Шмидта для более широкого класса дискретных линейных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами.

Первый шаг к решению задачи сделан в работе [15], где предложены новые UD-алгоритмы ковариационного и информационного типа. В настоящей работе мы предлагаем новые LD-алгоритмы дискретной фильтрации, для построения которых применяем прямую процедуру модифицированной взвешенной ортогонализации Грама–Шмидта.

Прямая процедура MWGS (LD-разложение) набора s линейно независимых столбцов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s$ матрицы $A \in \mathbb{R}^{r \times s}$ относительно весовой матрицы D_w приводит к нижней треугольной $s \times s$ -матрице L с единицами на диагонали, такой, что $A^T = LW^T$, т. е.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \dots \\ \mathbf{a}_s^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{s1} & l_{s2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^T \\ \mathbf{w}_2^T \\ \dots \\ \mathbf{w}_s^T \end{bmatrix},$$

где векторы \mathbf{w}_i есть столбцы матрицы MWGS-преобразования $W \in \mathbb{R}^{r \times s}$ и

$$W^T D_w W = \text{diag} \{ \beta_i \}_{1 \leq i \leq s} = D_\beta.$$

Таким образом, $A^T D_w A = LD_\beta L^T$.

Переформулировка метода MWGS для нижнетреугольных факторов приведена в [16] (см. лемму 3.2, с. 159). Алгоритм LD-разложения на основе прямой процедуры MWGS-ортогонализации сформулирован в [17].

1. Новый ковариационный LD-фильтр

“Стандартный” ковариационный фильтр для линейных дискретных стохастических систем вида (3), (4), который в каждый дискретный момент времени k позволяет вычислить оценку вектора состояния $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ и ковариационную матрицу ошибок оценивания P_k , может быть описан алгоритмом 1 из [15]. Данный алгоритм по своей структуре очень похож на хорошо известный дискретный фильтр Калмана [1], за исключением того, что в него дополнительно включены выражения для обновления матриц \tilde{Q}_k , X_k и \tilde{R}_k .

Алгоритм 1. Ковариационный фильтр (CF).

Инициализация. Вычислить $X_0 = \Pi_0 + \bar{x}_0 \bar{x}_0^T$. Положить $P_0 = \Pi_0$, $\hat{x}_0 = \bar{x}_0$.

for $k = 1, 2, \dots, N$ **do**

1. Обновление по времени.

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{k-1} &= \sigma_{\xi}^2 \tilde{F}_{k-1} X_{k-1} \tilde{F}_{k-1}^T + G_{k-1} Q_{k-1} G_{k-1}^T, \\ X_k &= F_{k-1} X_{k-1} F_{k-1}^T + \tilde{Q}_{k-1}, \\ P_{k|k-1} &= F_{k-1} P_{k-1} F_{k-1}^T + \tilde{Q}_{k-1}, \\ \hat{x}_{k|k-1} &= F_{k-1} \hat{x}_{k-1}.\end{aligned}\tag{5}$$

2. Обновление по измерениям.

$$\begin{aligned}\tilde{R}_k &= \sigma_{\zeta}^2 \tilde{H}_k X_k \tilde{H}_k^T + R_k, \\ B_k &= H_k P_{k|k-1} H_k^T + \tilde{R}_k,\end{aligned}\tag{7}$$

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T B_k^{-1},\tag{8}$$

$$P_k = (I - K_k H_k) P_{k|k-1},\tag{9}$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}).\tag{10}$$

Как отмечено выше, LD-алгоритмы дискретной фильтрации основаны на применении прямой процедуры модифицированной взвешенной ортогонализации Грама – Шмидта. Основными преимуществами алгоритмов являются устойчивость по отношению к ошибкам машинного округления, отсутствие операций извлечения квадратного корня и обращения полных матриц, компактная и однородная структура алгоритма, ориентированность на параллельные вычисления [18–21]. В классе дискретных стохастических систем с аддитивными гауссовскими шумами LD-алгоритмы показали свою эффективность при решении задач сопровождения целей [19], автоматического контроля оптимальности процесса дискретной фильтрации [18, 20], вычисления решения разностного уравнения чувствительности Риккати [17], оптимизации дискретной стохастической системы управления в условиях неопределенности [21].

Особенность рассматриваемого класса алгоритмов заключается в том, что они используют представление ковариационной матрицы ошибок оценивания P_k в виде произведения матриц LDL^T , где L — нижняя треугольная матрица с единицами на диагонали, D — диагональная матрица. Такое разложение существует для положительно определенной матрицы и может быть получено с помощью метода Холецкого [22].

Идея построения LD-алгоритмов на основе метода MWGS заключается в следующем. Рассмотрим матричное уравнение вида $P = A^T D_1 A + C^T D_2 C$. Если существует матрица MWGS-преобразования W такая, что $[A^T \ C^T] = LW^T$, где L — нижнетреугольная матрица с единицами на диагонали, то

$$P = [A^T \ C^T] \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = A^T D_1 A + C^T D_2 C = LDL^T,$$

где $\{L, D\}$ — нижний треугольный и диагональный факторы в LD-разложении матрицы P . Таким образом, класс LD-фильтров основан на прямой процедуре взвешенной ортогонализации при обновлении пары матриц $\{L, D\}$.

Несмотря на то что существуют различные варианты LD-фильтров, алгоритмы данного класса для дискретных линейных стохастических систем с мультипликативными

и аддитивными шумами еще не построены. Кроме того, большинство существующих LD-алгоритмов дискретной фильтрации представлены только в ковариационной форме.

В данной работе мы предлагаем новые ковариационный и информационный LD-алгоритмы для систем с мультипликативными и аддитивными шумами, имеющие расширенную структуру. Последнее означает, что все величины дискретного LD-фильтра помещаются в блочную матрицу и обрабатываются единообразно с помощью взвешенных ортогональных преобразований.

Предположим, что имеются так называемые *предмассивы* \mathcal{A} и $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$. Применяя к ним прямую процедуру MWGS-ортогонализации, получим *постмассивы* \mathcal{L} и $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$, такие что

$$\mathcal{A}^T = \mathcal{L}\mathfrak{W}^T \quad \text{и} \quad \mathcal{A}^T \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \mathcal{A} = \mathcal{L} \mathcal{D}_{\mathcal{L}} \mathcal{L}^T,$$

где \mathfrak{W} — матрица MWGS-преобразования.

Обозначим через $\hat{\mathbf{s}}_k = (L_{P_k} D_{P_k})^{-1} \hat{\mathbf{x}}_k$ LD-оценку ковариационного фильтра. Пусть $\text{chol}()$ — процедура модифицированного разложения Холецкого. Расширенный ковариационный LD-фильтр запишем в следующем виде.

Алгоритм 2. Расширенный ковариационный LD-фильтр (eLDCF).

Инициализация. Вычислить $X_0 = \Pi_0 + \bar{\mathbf{x}}_0 \bar{\mathbf{x}}_0^T$, $\text{chol}(\Pi_0) = L_{\Pi_0} D_{\Pi_0} L_{\Pi_0}^T$, $\text{chol}(X_0) = L_{X_0} D_{X_0} L_{X_0}^T$. Положить $L_{P_0} = L_{\Pi_0}$, $D_{P_0} = D_{\Pi_0}$, $\hat{\mathbf{s}}_0 = (L_{P_0} D_{P_0})^{-1} \bar{\mathbf{x}}_0$.

for $k = 1, 2, \dots, N$ **do**

1. Обновление по времени.

1.1. Вычислить $\text{chol}(Q_{k-1}) = L_{Q_{k-1}} D_{Q_{k-1}} L_{Q_{k-1}}^T$.

1.2. Вычислить LD-факторы $\{L_{\tilde{Q}_{k-1}}, D_{\tilde{Q}_{k-1}}\}$ матрицы \tilde{Q}_{k-1} :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{F}_{k-1} L_{X_{k-1}} & G_{k-1} L_{Q_{k-1}} \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}_{TU}^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{\tilde{Q}_{k-1}} \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}_{TU}} \mathfrak{W}_{TU}^T, \quad (11)$$

$$\mathfrak{W}_{TU}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{\xi}^2 D_{X_{k-1}} & 0 \\ 0 & D_{Q_{k-1}} \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{A}_{TU}}} \mathfrak{W}_{TU} = \underbrace{\begin{bmatrix} D_{\tilde{Q}_{k-1}} \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}_{TU}}}, \quad (12)$$

где $\mathfrak{W}_{TU} \in \mathbb{R}^{(n+q) \times n}$ — матрица MWGS-преобразования, позволяющего получить из предмассивов \mathcal{A}_{TU} и $\mathcal{D}_{\mathcal{A}_{TU}}$ постмассив \mathcal{L}_{TU} в форме нижнетреугольной блочной матрицы с единицами на главной диагонали и постмассив $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_{TU}}$ в форме диагональной блочной матрицы (см. правые части (11), (12)).

1.3. Вычислить LD-факторы $\{L_{P_{k|k-1}}, D_{P_{k|k-1}}\}$ матрицы $P_{k|k-1}$ и LD-оценку $\hat{\mathbf{s}}_{k|k-1}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_{k-1} L_{P_{k-1}} & L_{\tilde{Q}_{k-1}} \\ \hat{\mathbf{s}}_{k-1}^T & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}_{TU}^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{P_{k|k-1}} & 0 \\ \hat{\mathbf{s}}_{k|k-1}^T & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}_{TU}} \mathfrak{W}_{TU}^T, \quad (13)$$

$$\mathfrak{W}_{TU}^T \underbrace{\begin{bmatrix} D_{P_{k-1}} & 0 \\ 0 & D_{\tilde{Q}_{k-1}} \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{A}_{TU}}} \mathfrak{W}_{TU} = \underbrace{\begin{bmatrix} D_{P_{k|k-1}} & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}_{TU}}}, \quad (14)$$

где $\mathfrak{W}_{TU} \in \mathbb{R}^{2n \times (n+1)}$ — матрица MWGS-преобразования, позволяющего получить из предмассивов \mathcal{A}_{TU} и $\mathcal{D}_{\mathcal{A}_{TU}}$ постмассив \mathcal{L}_{TU} в форме нижнетреугольной блочной матрицы с единицами на главной диагонали и постмассив $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_{TU}}$ в форме диагональной

блочной матрицы (см. правые части (13), (14)). Скаляр γ является “побочным” результатом процедуры ортогонализации и не участвует в дальнейших вычислениях.

1.4. Вычислить LD-факторы $\{L_{X_k}, D_{X_k}\}$ матрицы X_k :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_{k-1}L_{X_{k-1}} & L_{\tilde{Q}_{k-1}} \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}_{TU}^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{X_k} \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}_{TU}} \mathfrak{W}_{TU}^T, \quad (15)$$

$$\mathfrak{W}_{TU}^T \underbrace{\begin{bmatrix} D_{X_{k-1}} & 0 \\ 0 & D_{\tilde{Q}_{k-1}} \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{A}_{TU}}} \mathfrak{W}_{TU} = \underbrace{\begin{bmatrix} D_{X_k} \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}_{TU}}}, \quad (16)$$

где $\mathfrak{W}_{TU} \in \mathbb{R}^{2n \times n}$ — матрица MWGS-преобразования, позволяющего получить из предмассивов \mathcal{A}_{TU} и $\mathcal{D}_{\mathcal{A}_{TU}}$ постмассив \mathcal{L}_{TU} в форме нижнетреугольной блочной матрицы с единицами на главной диагонали и постмассив $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_{TU}}$ в форме диагональной блочной матрицы (см. правые части (15), (16)).

2. Обновление по измерениям.

2.1. Вычислить $\text{chol}(R_k) = L_{R_k} D_{R_k} L_{R_k}^T$.

2.2. Вычислить LD-факторы $\{L_{\tilde{R}_k}, D_{\tilde{R}_k}\}$ матрицы \tilde{R}_k :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{H}_k L_{X_k} & L_{R_k} \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}_{MU}^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{\tilde{R}_k} \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}_{MU}} \mathfrak{W}_{MU}^T, \quad (17)$$

$$\mathfrak{W}_{MU}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_\zeta^2 D_{X_k} & 0 \\ 0 & D_{R_k} \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{A}_{MU}}} \mathfrak{W}_{MU} = \underbrace{\begin{bmatrix} D_{\tilde{R}_k} \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}_{MU}}}, \quad (18)$$

где $\mathfrak{W}_{TU} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times m}$ — матрица MWGS-преобразования, позволяющего получить из предмассивов \mathcal{A}_{MU} и $\mathcal{D}_{\mathcal{A}_{MU}}$ постмассив \mathcal{L}_{MU} в форме нижнетреугольной блочной матрицы с единицами на главной диагонали и постмассив $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_{MU}}$ в форме диагональной блочной матрицы (см. правые части (17), (18)).

2.3. Вычислить LD-факторы $\{L_{P_k}, D_{P_k}\}$ матрицы P_k и LD-оценку \hat{s}_k :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} L_{\tilde{R}_k} & H_k L_{P_{k|k-1}} & 0 \\ 0 & L_{P_{k|k-1}} & 0 \\ -\mathbf{z}_k^T (L_{\tilde{R}_k} D_{\tilde{R}_k})^{-T} & \hat{\mathbf{s}}_{k|k-1}^T & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}_{MU}^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{B_k} & 0 & 0 \\ K_k L_{B_k} & L_{P_k} & 0 \\ \boldsymbol{\tau}^T & \hat{\mathbf{s}}_k^T & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}_{MU}} \mathfrak{W}_{MU}^T, \quad (19)$$

$$\mathfrak{W}_{MU}^T \underbrace{\begin{bmatrix} D_{\tilde{R}_k} & 0 & 0 \\ 0 & D_{P_{k|k-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{A}_{MU}}} \mathfrak{W}_{MU} = \underbrace{\begin{bmatrix} D_{B_k} & 0 & 0 \\ 0 & D_{P_k} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}_{MU}}}, \quad (20)$$

где $\mathfrak{W}_{MU} \in \mathbb{R}^{(m+n+1) \times (m+n+1)}$ — матрица MWGS-преобразования, позволяющего получить из предмассивов \mathcal{A}_{MU} и $\mathcal{D}_{\mathcal{A}_{MU}}$ постмассив \mathcal{L}_{MU} в форме нижнетреугольной блочной матрицы с единицами на главной диагонали и постмассив $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_{MU}}$ в форме диагональной блочной матрицы (см. правые части (19), (20)). Скаляр α и вектор-строка $\boldsymbol{\tau}^T$ являются “побочными” результатами процедуры ортогонализации и не участвуют в дальнейших вычислениях.

Замечание 1. В любой момент времени k оценку вектора состояния \mathbf{x}_k можно вычислить как $\hat{\mathbf{x}}_k = L_{P_k} D_{P_k} \hat{\mathbf{s}}_k$.

Теорема 1. Алгоритм 1 (CF) и алгоритм 2 (eLDCF) алгебраически эквивалентны.

Доказательство. Доказательство основано на матричных тождествах

$$\mathcal{A}^T \mathcal{D}_A \mathcal{A} = \mathcal{L} \mathcal{D}_L \mathcal{L}^T \quad \text{и} \quad \mathcal{W}^T \mathcal{D}_A \mathcal{W} = \mathcal{D}_L. \quad (21)$$

Покажем, что формулы (13) и (14) эквивалентны формулам (5) и (6).

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{TU}^T \mathcal{D}_{\mathcal{A}_{TU}} \mathcal{A}_{TU} &= \begin{bmatrix} F_{k-1} L_{P_{k-1}} & L_{\tilde{Q}_{k-1}} \\ \hat{\mathbf{s}}_{k-1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{P_{k-1}} & 0 \\ 0 & D_{\tilde{Q}_{k-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{P_{k-1}}^T F_{k-1}^T & \hat{\mathbf{s}}_{k-1} \\ L_{\tilde{Q}_{k-1}}^T & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} F_{k-1} L_{P_{k-1}} D_{P_{k-1}} L_{P_{k-1}}^T F_{k-1}^T + L_{\tilde{Q}_{k-1}} D_{\tilde{Q}_{k-1}} L_{\tilde{Q}_{k-1}}^T & F_{k-1} L_{P_{k-1}} D_{P_{k-1}} \hat{\mathbf{s}}_{k-1} \\ \hat{\mathbf{s}}_{k-1}^T D_{P_{k-1}} L_{P_{k-1}}^T F_{k-1}^T & \hat{\mathbf{s}}_{k-1}^T D_{P_{k-1}} \hat{\mathbf{s}}_{k-1} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} F_{k-1} P_{k-1} F_{k-1}^T + \tilde{Q}_{k-1} & F_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^T F_{k-1}^T & \hat{\mathbf{s}}_{k-1}^T D_{P_{k-1}} \hat{\mathbf{s}}_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{A}}_{11} & \bar{\mathcal{A}}_{12} \\ \bar{\mathcal{A}}_{21} & \bar{\mathcal{A}}_{22} \end{bmatrix} = \bar{\mathcal{A}}, \\ \mathcal{L}_{TU} \mathcal{D}_{\mathcal{L}_{TU}} \mathcal{L}_{TU}^T &= \begin{bmatrix} L_{P_{k|k-1}} & 0 \\ \hat{\mathbf{s}}_{k|k-1}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{P_{k|k-1}} & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{P_{k|k-1}}^T & \hat{\mathbf{s}}_{k|k-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} L_{P_{k|k-1}} D_{P_{k|k-1}} L_{P_{k|k-1}}^T & L_{P_{k|k-1}} D_{P_{k|k-1}} \hat{\mathbf{s}}_{k|k-1} \\ \hat{\mathbf{s}}_{k|k-1}^T D_{P_{k|k-1}} L_{P_{k|k-1}}^T & \hat{\mathbf{s}}_{k|k-1}^T D_{P_{k|k-1}} \hat{\mathbf{s}}_{k|k-1} + \gamma \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} P_{k|k-1} & \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^T & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \check{\mathcal{A}}_{11} & \check{\mathcal{A}}_{12} \\ \check{\mathcal{A}}_{21} & \check{\mathcal{A}}_{22} \end{bmatrix} = \check{\mathcal{A}}. \end{aligned}$$

Из равенства $\bar{\mathcal{A}} = \check{\mathcal{A}}$ следует, в частности, что $\bar{\mathcal{A}}_{11} = \check{\mathcal{A}}_{11}$ и $\bar{\mathcal{A}}_{12} = \check{\mathcal{A}}_{12}$, откуда следуют формулы (5) и (6).

Покажем, что формулы (19) и (20) эквивалентны формулам (7)–(10).

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{MU}^T \mathcal{D}_{\mathcal{A}_{MU}} \mathcal{A}_{MU} &= \\ &= \begin{bmatrix} L_{\tilde{R}_k} & H_k L_{P_{k|k-1}} & 0 \\ 0 & L_{P_{k|k-1}} & 0 \\ -\mathbf{z}_k^T (L_{\tilde{R}_k} D_{\tilde{R}_k})^{-T} & \hat{\mathbf{s}}_{k|k-1}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{\tilde{R}_k} & 0 & 0 \\ 0 & D_{P_{k|k-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{\tilde{R}_k}^T & 0 & -(L_{\tilde{R}_k} D_{\tilde{R}_k})^{-1} \mathbf{z}_k \\ (H_k L_{P_{k|k-1}})^T & L_{P_{k|k-1}}^T & \hat{\mathbf{s}}_{k|k-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (*) & H_k L_{P_{k|k-1}} D_{P_{k|k-1}} L_{P_{k|k-1}}^T & -\mathbf{z}_k + H_k L_{P_{k|k-1}} D_{P_{k|k-1}} \hat{\mathbf{s}}_{k|k-1} \\ L_{P_{k|k-1}} D_{P_{k|k-1}} (H_k L_{P_{k|k-1}})^T & L_{P_{k|k-1}} D_{P_{k|k-1}} L_{P_{k|k-1}}^T & L_{P_{k|k-1}} D_{P_{k|k-1}} \hat{\mathbf{s}}_{k|k-1} \\ -\mathbf{z}_k^T + \hat{\mathbf{s}}_{k|k-1}^T D_{P_{k|k-1}} (H_k L_{P_{k|k-1}})^T & \hat{\mathbf{s}}_{k|k-1}^T D_{P_{k|k-1}} L_{P_{k|k-1}}^T & (**) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{R}_k + H_k P_{k|k-1} H_k^T & H_k P_{k|k-1} & -\mathbf{z}_k + H_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \\ P_{k|k-1} H_k^T & P_{k|k-1} & \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \\ -\mathbf{z}_k^T + \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^T H_k^T & \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^T & (**) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{A}}_{11} & \bar{\mathcal{A}}_{12} & \bar{\mathcal{A}}_{13} \\ \bar{\mathcal{A}}_{21} & \bar{\mathcal{A}}_{22} & \bar{\mathcal{A}}_{23} \\ \bar{\mathcal{A}}_{31} & \bar{\mathcal{A}}_{32} & \bar{\mathcal{A}}_{33} \end{bmatrix} = \bar{\mathcal{A}}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} (*) &= L_{\tilde{R}_k} D_{\tilde{R}_k} L_{\tilde{R}_k}^T + (H_k L_{P_{k|k-1}}) D_{P_{k|k-1}} (H_k L_{P_{k|k-1}})^T, \\ (**) &= \mathbf{z}_k^T (L_{\tilde{R}_k} D_{\tilde{R}_k})^{-T} D_{\tilde{R}_k} (L_{\tilde{R}_k} D_{\tilde{R}_k})^{-1} \mathbf{z}_k + \hat{\mathbf{s}}_{k|k-1}^T D_{P_{k|k-1}} \hat{\mathbf{s}}_{k|k-1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{MU} \mathcal{D}_{\mathcal{L}_{MU}} \mathcal{L}_{MU}^T &= \begin{bmatrix} L_{B_k} & 0 & 0 \\ K_k L_{B_k} & L_{P_k} & 0 \\ \boldsymbol{\tau}^T & \hat{\mathbf{s}}_k^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{B_k} & 0 & 0 \\ 0 & D_{P_k} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{B_k}^T & (K_k L_{B_k})^T & \boldsymbol{\tau} \\ 0 & L_{P_k}^T & \hat{\mathbf{s}}_k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} L_{B_k} D_{B_k} L_{B_k}^T & L_{B_k} D_{B_k} (K_k L_{B_k})^T & L_{B_k} D_{B_k} \boldsymbol{\tau} \\ K_k L_{B_k} D_{B_k} L_{B_k}^T & (K_k L_{B_k}) D_{B_k} (K_k L_{B_k})^T + L_{P_k} D_{P_k} L_{P_k}^T & K_k L_{B_k} D_{B_k} \boldsymbol{\tau} + L_{P_k} D_{P_k} \hat{\mathbf{s}}_k \\ \boldsymbol{\tau}^T D_{B_k} L_{B_k}^T & \boldsymbol{\tau}^T D_{B_k} (K_k L_{B_k})^T + \hat{\mathbf{s}}_k^T D_{P_k} L_{P_k}^T & \boldsymbol{\tau}^T D_{B_k} \boldsymbol{\tau} + \hat{\mathbf{s}}_k^T D_{P_k} \hat{\mathbf{s}}_k + \alpha^2 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} B_k & B_k K_k^T & L_{B_k} D_{B_k} \boldsymbol{\tau} \\ K_k B_k & K_k B_k K_k^T + P_k & K_k L_{B_k} D_{B_k} \boldsymbol{\tau} + \hat{\mathbf{x}}_k \\ \boldsymbol{\tau}^T D_{B_k} L_{B_k}^T & \boldsymbol{\tau}^T D_{B_k} L_{B_k}^T K_k^T + \hat{\mathbf{x}}_k^T & \boldsymbol{\tau}^T D_{B_k} \boldsymbol{\tau} + \hat{\mathbf{s}}_k^T D_{P_k} \hat{\mathbf{s}}_k + \alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \check{\mathcal{A}}_{11} & \check{\mathcal{A}}_{12} & \check{\mathcal{A}}_{13} \\ \check{\mathcal{A}}_{21} & \check{\mathcal{A}}_{22} & \check{\mathcal{A}}_{23} \\ \check{\mathcal{A}}_{31} & \check{\mathcal{A}}_{32} & \check{\mathcal{A}}_{33} \end{bmatrix} = \check{\mathcal{A}}.
\end{aligned}$$

Из равенства $\bar{\mathcal{A}} = \check{\mathcal{A}}$ получаем:

- 1) $\bar{\mathcal{A}}_{11} = \tilde{R}_k + H_k P_{k|k-1} H_k^T$, $\check{\mathcal{A}}_{11} = B_k$, следовательно, $B_k = H_k P_{k|k-1} H_k^T + \tilde{R}_k$, т. е. выполняется (7);
 - 2) $\bar{\mathcal{A}}_{21} = P_{k|k-1} H_k^T$, $\check{\mathcal{A}}_{22} = K_k B_k$, следовательно, $K_k B_k = P_{k|k-1} H_k^T$, откуда $K_k = P_{k|k-1} H_k^T B_k^{-1}$, т. е. выполняется (8);
 - 3) $\bar{\mathcal{A}}_{22} = P_{k|k-1}$, $\check{\mathcal{A}}_{22} = K_k B_k K_k^T + P_k$, следовательно, $P_{k|k-1} = K_k B_k K_k^T + P_k$, откуда $P_k = P_{k|k-1} - K_k B_k K_k^T = \left| K_k = P_{k|k-1} H_k^T B_k^{-1} \right| = P_{k|k-1} - P_{k|k-1} H_k^T B_k^{-1} B_k B_k^{-T} H_k P_{k|k-1} = \left| B_k^{-1} = B_k^{-T} \right| = P_{k|k-1} - K_k H_k P_{k|k-1} = (I - K_k H_k) P_{k|k-1}$, т. е. выполняется (9);
 - 4) $\bar{\mathcal{A}}_{23} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$, $\check{\mathcal{A}}_{23} = K_k L_{B_k} D_{B_k} \boldsymbol{\tau} + \hat{\mathbf{x}}_k$, следовательно, $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - K_k L_{B_k} D_{B_k} \boldsymbol{\tau}$. $\bar{\mathcal{A}}_{13} = -\mathbf{z}_k + H_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$, $\check{\mathcal{A}}_{13} = L_{B_k} D_{B_k} \boldsymbol{\tau}$, следовательно, $L_{B_k} D_{B_k} \boldsymbol{\tau} = -\mathbf{z}_k + H_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$, откуда $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + K_k (\mathbf{z}_k - H_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})$, т. е. выполняется (10).
- Эквивалентность остальных формул доказывается аналогично. \square

2. Новый информационный LD-фильтр

Информационный фильтр (IF) является известной альтернативой фильтру Калмана [1], в котором вместо ковариационной матрицы ошибок оценивания P_k используется обратная к ней матрица $Y_k \triangleq P_k^{-1}$, известная как информационная матрица, а вместо вектора состояния \mathbf{x}_k — вектор $\mathbf{y}_k \triangleq Y_k \mathbf{x}_k$, называемый информационным вектором. Информационный фильтр особенно полезен, когда отсутствует априорная информация о характеристиках начального состояния системы [1].

Информационный фильтр для системы (1), (2) можно получить из алгоритма 1, применяя лемму об обращении [23].

Алгоритм 3. Информационный фильтр (IF).

Инициализация. Вычислить $X_0 = \Pi_0 + \bar{\mathbf{x}}_0 \bar{\mathbf{x}}_0^T$. Положить $Y_0 = \Pi_0^{-1}$, $\hat{\mathbf{y}}_0 = Y_0 \bar{\mathbf{x}}_0$.

for $k = 1, 2, \dots, N$ **do**

I. Обновление по времени.

$$\tilde{Q}_{k-1} = \sigma_\xi^2 \tilde{F}_{k-1} X_{k-1} \tilde{F}_{k-1}^T + G_{k-1} Q_{k-1} G_{k-1}^T,$$

$$X_k = F_{k-1} X_{k-1} F_{k-1}^T + \tilde{Q}_{k-1},$$

$$S_{k-1} = F_{k-1}^{-T} Y_{k-1} F_{k-1}^{-1}, \quad (22)$$

$$C_{k-1} = S_{k-1} + \tilde{Q}_{k-1}^{-1}, \quad (23)$$

$$J_{k-1} = S_{k-1}C_{k-1}^{-1}, \quad (24)$$

$$Y_{k|k-1} = (I - J_{k-1})S_{k-1}, \quad (25)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} = (I - J_{k-1})F_{k-1}^{-T}\hat{\mathbf{y}}_{k-1}. \quad (26)$$

II. Обновление по измерениям.

$$\tilde{R}_k = \sigma_\zeta^2 \tilde{H}_k X_k \tilde{H}_k^T + R_k,$$

$$Y_k = Y_{k|k-1} + H_k^T \tilde{R}_k^{-1} H_k,$$

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} + H_k^T \tilde{R}_k^{-1} \mathbf{z}_k.$$

Обозначим через $\hat{\mathbf{d}}_k = (L_{Y_k} D_{Y_k})^{-1} \hat{\mathbf{y}}_k$ LD-оценку информационного фильтра. Расширенный информационный LD-фильтр запишем в следующем виде.

Алгоритм 4. Расширенный информационный LD-фильтр (eLDIF).

Инициализация. Вычислить $Y_0 = \Pi_0^{-1}$, $\text{chol}(Y_0) = L_{Y_0} D_{Y_0} L_{Y_0}^T$, $X_0 = \Pi_0 + \bar{\mathbf{x}}_0 \bar{\mathbf{x}}_0^T$, $\text{chol}(X_0) = L_{X_0} D_{X_0} L_{X_0}^T$. Положить $\hat{\mathbf{d}}_0 = (L_{Y_0} D_{Y_0})^{-1} \bar{\mathbf{y}}_0$, где $\bar{\mathbf{y}}_0 = Y_0 \bar{\mathbf{x}}_0$.

for $k = 1, 2, \dots, N$ **do**

1. Обновление по времени.

1.1. Вычислить $\text{chol}(Q_{k-1}) = L_{Q_{k-1}} D_{Q_{k-1}} L_{Q_{k-1}}^T$.

1.2. Вычислить LD-факторы $\{L_{\tilde{Q}_{k-1}}, D_{\tilde{Q}_{k-1}}\}$ матрицы \tilde{Q}_{k-1} по формулам (11), (12).

1.3. Вычислить LD-факторы $\{L_{Y_{k|k-1}}, D_{Y_{k|k-1}}\}$ матрицы $Y_{k|k-1}$ и LD-оценку $\hat{\mathbf{d}}_{k|k-1}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} L_{\tilde{Q}_{k-1}}^{-T} & F_{k-1}^{-T} L_{Y_{k-1}} & 0 \\ 0 & F_{k-1}^{-T} L_{Y_{k-1}} & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{d}}_{k-1}^T & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}_{TU}^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{C_{k-1}} & 0 & 0 \\ J_{k-1} L_{C_{k-1}} & L_{Y_{k|k-1}} & 0 \\ \boldsymbol{\tau}^T & \hat{\mathbf{d}}_{k|k-1}^T & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}_{TU}} \mathfrak{W}_{TU}^T, \quad (27)$$

$$\mathfrak{W}_{TU}^T \underbrace{\begin{bmatrix} D_{\tilde{Q}_{k-1}}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & D_{Y_{k-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{A}_{TU}}} \mathfrak{W}_{TU} = \underbrace{\begin{bmatrix} D_{C_{k-1}} & 0 & 0 \\ 0 & D_{Y_{k|k-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}_{TU}}}, \quad (28)$$

где $\mathfrak{W}_{TU} \in \mathbb{R}^{(2n+1) \times (2n+1)}$ — матрица MWGS-преобразования, позволяющего получить из предмассивов \mathcal{A}_{TU} и $\mathcal{D}_{\mathcal{A}_{TU}}$ постмассив \mathcal{L}_{TU} в форме нижнетреугольной блочной матрицы с единицами на главной диагонали и постмассив $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_{TU}}$ в форме диагональной блочной матрицы (см. правые части (27), (28)). Скаляр α и вектор-строка $\boldsymbol{\tau}^T$ являются “побочными” результатами процедуры ортогонализации и не участвуют в дальнейших вычислениях.

1.4. Вычислить LD-факторы $\{L_{X_k}, D_{X_k}\}$ матрицы X_k по формулам (15), (16).

2. Обновление по измерениям.

2.1. Вычислить $\text{chol}(R_k) = L_{R_k} D_{R_k} L_{R_k}^T$.

2.2. Вычислить LD-факторы $\{L_{\tilde{R}_k}, D_{\tilde{R}_k}\}$ матрицы \tilde{R}_k по формулам (17), (18).

2.3. Вычислить $\{L_{Y_k}, D_{Y_k}\}$ и $\hat{\mathbf{d}}_k$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} H_k^T L_{\hat{R}_k}^{-T} & L_{Y_{k|k-1}} \\ \mathbf{z}_k^T L_{\hat{R}_k}^{-T} & \hat{\mathbf{d}}_{k|k-1}^T \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}_{MU}^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{Y_k} & 0 \\ \hat{\mathbf{d}}_k^T & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}_{MU}} \mathfrak{W}_{MU}^T, \quad (29)$$

$$\mathfrak{W}_{MU}^T \underbrace{\begin{bmatrix} D_{\hat{R}_k}^{-1} & 0 \\ 0 & D_{Y_{k|k-1}} \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{A}_{MU}}} \mathfrak{W}_{MU} = \underbrace{\begin{bmatrix} D_{Y_k} & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}_{MU}}}, \quad (30)$$

где $\mathfrak{W}_{MU} \in \mathbb{R}^{(m+n) \times (n+1)}$ — матрица MWGS-преобразования, позволяющего получить из предмассивов \mathcal{A}_{MU} и $\mathcal{D}_{\mathcal{A}_{MU}}$ постмассив \mathcal{L}_{MU} в форме нижнетреугольной блочной матрицы с единицами на главной диагонали и постмассив $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_{MU}}$ в форме диагональной блочной матрицы (см. правые части (29), (30)). Скаляр γ является “побочным” результатом процедуры ортогонализации и не участвует в дальнейших вычислениях.

Замечание 2. В любой момент времени k оценку вектора состояния \mathbf{x}_k можно вычислить с помощью прямой подстановки как решение системы $L_{Y_k} \hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{d}}_k$.

Теорема 2. Алгоритм 3 (IF) и алгоритм 4 (eLDIF) алгебраически эквивалентны.

Доказательство. Доказательство основано на тождестве (21).

Покажем, что формулы (27) и (28) эквивалентны формулам (22)–(26).

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{TU}^T \mathcal{D}_{\mathcal{A}_{TU}} \mathcal{A}_{TU} &= \begin{bmatrix} L_{\hat{Q}_{k-1}}^{-T} & F_{k-1}^{-T} L_{Y_{k-1}} & 0 \\ 0 & F_{k-1}^{-T} L_{Y_{k-1}} & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{d}}_{k-1}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{\hat{Q}_{k-1}}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & D_{Y_{k-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{\hat{Q}_{k-1}}^{-1} & 0 & 0 \\ L_{Y_{k-1}}^T F_{k-1}^{-1} & L_{Y_{k-1}}^T F_{k-1}^{-1} & \hat{\mathbf{d}}_{k-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (*) & (**) & F_{k-1}^{-T} L_{Y_{k-1}} D_{Y_{k-1}} \hat{\mathbf{d}}_{k-1} \\ (**) & (**) & F_{k-1}^{-T} L_{Y_{k-1}} D_{Y_{k-1}} \hat{\mathbf{d}}_{k-1} \\ \hat{\mathbf{d}}_{k-1}^T D_{Y_{k-1}} L_{Y_{k-1}}^T F_{k-1}^{-1} & \hat{\mathbf{d}}_{k-1}^T D_{Y_{k-1}} L_{Y_{k-1}}^T F_{k-1}^{-1} & \hat{\mathbf{d}}_{k-1}^T D_{Y_{k-1}} \hat{\mathbf{d}}_{k-1} + 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{Q}_{k-1}^{-1} + F_{k-1}^{-T} Y_{k-1} F_{k-1}^{-1} & F_{k-1}^{-T} Y_{k-1} F_{k-1}^{-1} & F_{k-1}^{-T} L_{Y_{k-1}} D_{Y_{k-1}} \hat{\mathbf{d}}_{k-1} \\ F_{k-1}^{-T} Y_{k-1} F_{k-1}^{-1} & F_{k-1}^{-T} Y_{k-1} F_{k-1}^{-1} & F_{k-1}^{-T} L_{Y_{k-1}} D_{Y_{k-1}} \hat{\mathbf{d}}_{k-1} \\ \hat{\mathbf{d}}_{k-1}^T D_{Y_{k-1}} L_{Y_{k-1}}^T F_{k-1}^{-1} & \hat{\mathbf{d}}_{k-1}^T D_{Y_{k-1}} L_{Y_{k-1}}^T F_{k-1}^{-1} & \hat{\mathbf{d}}_{k-1}^T D_{Y_{k-1}} \hat{\mathbf{d}}_{k-1} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \bar{A}_{13} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & \bar{A}_{23} \\ \bar{A}_{31} & \bar{A}_{32} & \bar{A}_{33} \end{bmatrix} = \bar{\mathcal{A}}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} (*) &= L_{\hat{Q}_{k-1}}^{-T} D_{\hat{Q}_{k-1}}^{-1} L_{\hat{Q}_{k-1}}^{-1} + F_{k-1}^{-T} L_{Y_{k-1}} D_{Y_{k-1}} L_{Y_{k-1}}^T F_{k-1}^{-1}, \\ (**) &= F_{k-1}^{-T} L_{Y_{k-1}} D_{Y_{k-1}} L_{Y_{k-1}}^T F_{k-1}^{-1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{TU} \mathcal{D}_{\mathcal{L}_{TU}} \mathcal{L}_{TU}^T &= \begin{bmatrix} L_{C_{k-1}} & 0 & 0 \\ J_{k-1} L_{C_{k-1}} & L_{Y_{k|k-1}} & 0 \\ \boldsymbol{\tau}^T & \hat{\mathbf{d}}_{k|k-1}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{C_{k-1}} & 0 & 0 \\ 0 & D_{Y_{k|k-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{C_{k-1}}^T & (J_{k-1} L_{C_{k-1}})^T & \boldsymbol{\tau} \\ 0 & L_{Y_{k|k-1}}^T & \hat{\mathbf{d}}_{k|k-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \check{A}_{11} & \check{A}_{12} & \check{A}_{13} \\ \check{A}_{21} & \check{A}_{22} & \check{A}_{23} \\ \check{A}_{31} & \check{A}_{32} & \check{A}_{33} \end{bmatrix} = \check{\mathcal{A}}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\check{\mathcal{A}}_{11} &= L_{C_{k-1}} D_{C_{k-1}} L_{C_{k-1}}^T, \\
\check{\mathcal{A}}_{12} &= L_{C_{k-1}} D_{C_{k-1}} (J_{k-1} L_{C_{k-1}})^T, \\
\check{\mathcal{A}}_{13} &= L_{C_{k-1}} D_{C_{k-1}} \boldsymbol{\tau}, \\
\check{\mathcal{A}}_{21} &= J_{k-1} L_{C_{k-1}} D_{C_{k-1}} L_{C_{k-1}}^T, \\
\check{\mathcal{A}}_{22} &= (J_{k-1} L_{C_{k-1}}) D_{C_{k-1}} (J_{k-1} L_{C_{k-1}})^T + L_{Y_{k|k-1}} D_{Y_{k|k-1}} L_{Y_{k|k-1}}^T, \\
\check{\mathcal{A}}_{23} &= J_{k-1} L_{C_{k-1}} D_{C_{k-1}} \boldsymbol{\tau} + L_{Y_{k|k-1}} D_{Y_{k|k-1}} \hat{\mathbf{d}}_{k|k-1}, \\
\check{\mathcal{A}}_{31} &= \boldsymbol{\tau}^T D_{C_{k-1}} L_{C_{k-1}}^T, \\
\check{\mathcal{A}}_{32} &= \boldsymbol{\tau}^T D_{C_{k-1}} (J_{k-1} L_{C_{k-1}})^T + \hat{\mathbf{d}}_{k|k-1}^T D_{Y_{k|k-1}} L_{Y_{k|k-1}}^T, \\
\check{\mathcal{A}}_{33} &= \boldsymbol{\tau}^T D_{C_{k-1}} \boldsymbol{\tau} + \hat{\mathbf{d}}_{k|k-1}^T D_{Y_{k|k-1}} \hat{\mathbf{d}}_{k|k-1} + \alpha.
\end{aligned}$$

Из равенства $\bar{\mathcal{A}} = \check{\mathcal{A}}$ получаем:

1) $\bar{\mathcal{A}}_{11} = \tilde{Q}_{k-1}^{-1} + F_{k-1}^{-T} Y_{k-1} F_{k-1}^{-1}$, $\check{\mathcal{A}}_{11} = L_{C_{k-1}} D_{C_{k-1}} L_{C_{k-1}}^T = C_{k-1}$, следовательно, $C_{k-1} = \tilde{Q}_{k-1}^{-1} + S_{k-1}$, где $S_{k-1} = F_{k-1}^{-T} Y_{k-1} F_{k-1}^{-1}$, т. е. выполняются (22) и (23);

2) $\bar{\mathcal{A}}_{22} = F_{k-1}^{-T} Y_{k-1} F_{k-1}^{-1} = S_{k-1}$,

$$\check{\mathcal{A}}_{22} = (J_{k-1} L_{C_{k-1}}) D_{C_{k-1}} (J_{k-1} L_{C_{k-1}})^T + L_{Y_{k|k-1}} D_{Y_{k|k-1}} L_{Y_{k|k-1}}^T = J_{k-1} C_{k-1} J_{k-1}^T + Y_{k|k-1},$$

следовательно, $S_{k-1} = J_{k-1} C_{k-1} J_{k-1}^T + Y_{k|k-1}$, откуда

$$\begin{aligned}
Y_{k|k-1} &= S_{k-1} - J_{k-1} C_{k-1} J_{k-1}^T = \left| J_{k-1} = S_{k-1} C_{k-1}^{-1} \right| = \\
&= S_{k-1} - J_{k-1} (\tilde{Q}_{k-1}^{-1} + S_{k-1}) (\tilde{Q}_{k-1}^{-1} + S_{k-1})^{-T} S_{k-1} = S_{k-1} - J_{k-1} S_{k-1} = (I - J_{k-1}) S_{k-1},
\end{aligned}$$

т. е. выполняются (24) и (25);

3) $\bar{\mathcal{A}}_{13} = F_{k-1}^{-T} L_{Y_{k-1}} D_{Y_{k-1}} \hat{\mathbf{d}}_{k-1} = F_{k-1}^{-T} \hat{\mathbf{y}}_{k-1}$, $\check{\mathcal{A}}_{13} = L_{C_{k-1}} D_{C_{k-1}} \boldsymbol{\tau}$, следовательно,

$$F_{k-1}^{-T} \hat{\mathbf{y}}_{k-1} = L_{C_{k-1}} D_{C_{k-1}} \boldsymbol{\tau},$$

$$\bar{\mathcal{A}}_{23} = F_{k-1}^{-T} L_{Y_{k-1}} D_{Y_{k-1}} \hat{\mathbf{d}}_{k-1} = F_{k-1}^{-T} \hat{\mathbf{y}}_{k-1}, \quad \check{\mathcal{A}}_{23} = J_{k-1} L_{C_{k-1}} D_{C_{k-1}} \boldsymbol{\tau} + L_{Y_{k|k-1}} D_{Y_{k|k-1}} \hat{\mathbf{d}}_{k|k-1},$$

следовательно,

$$F_{k-1}^{-T} \hat{\mathbf{y}}_{k-1} = J_{k-1} L_{C_{k-1}} D_{C_{k-1}} \boldsymbol{\tau} + L_{Y_{k|k-1}} D_{Y_{k|k-1}} \hat{\mathbf{d}}_{k|k-1} = J_{k-1} F_{k-1}^{-T} \hat{\mathbf{y}}_{k-1} + \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1},$$

откуда

$$\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} = (I - J_{k-1}) F_{k-1}^{-T} \hat{\mathbf{y}}_{k-1},$$

т. е. выполняется (26).

Эквивалентность остальных формул доказывается аналогично. \square

3. Численные эксперименты

Рассмотрим модель почти прямолинейного движения на плоскости [24] с мультипликативными и аддитивными шумами в уравнении объекта и измерений:

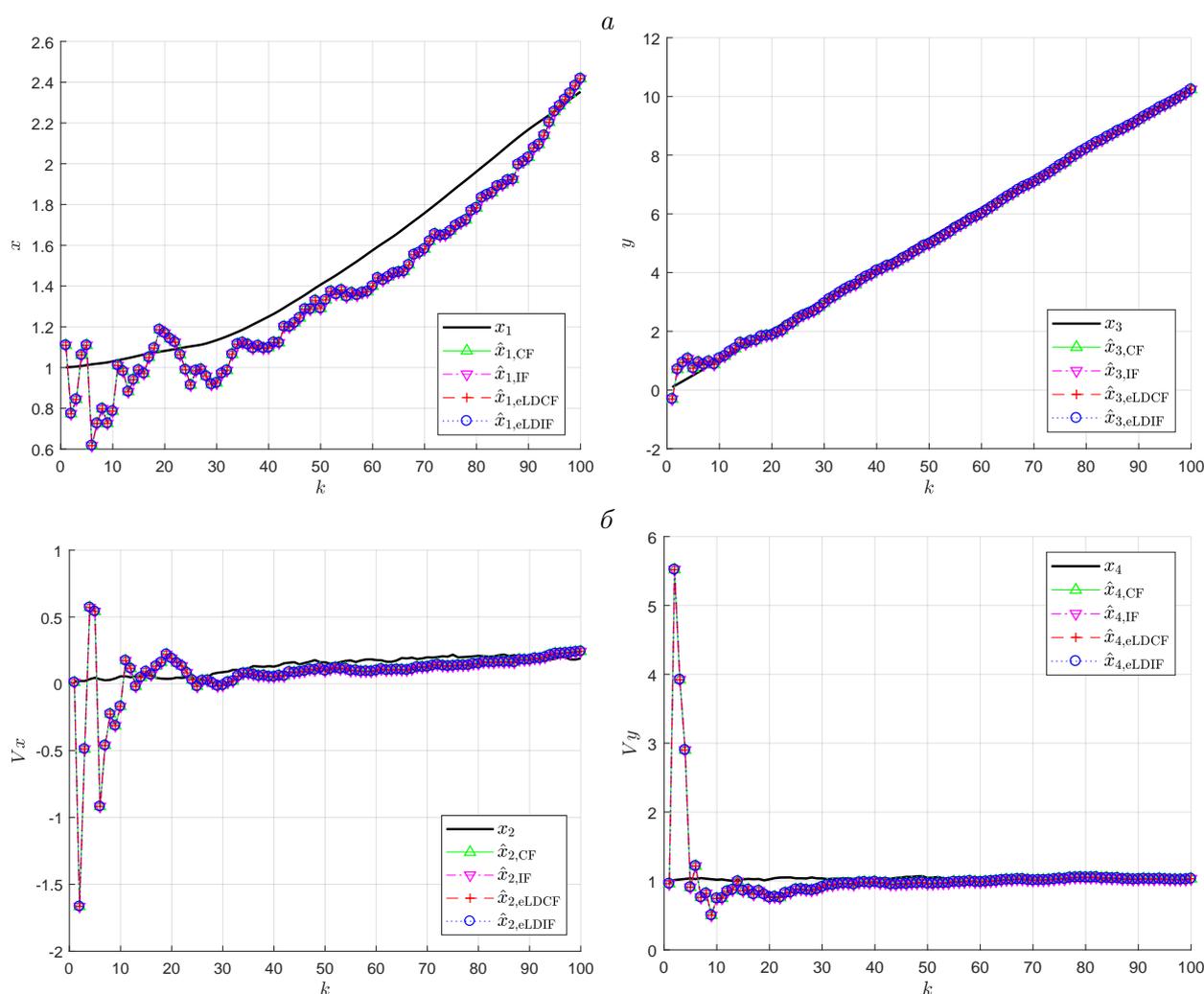
$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = \left(\begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \xi_{k-1} \right) \mathbf{x}_{k-1} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} T^2 & 0 \\ T & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} T^2 \\ 0 & T \end{bmatrix} \mathbf{w}_{k-1}, \\ \mathbf{z}_k = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{bmatrix} \zeta_k \right) + \mathbf{v}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \end{cases}$$

где x_1, x_3 — координаты x и y объекта на плоскости; x_2, x_4 — проекции v_x и v_y скорости объекта на оси Ox и Oy ; $T = 0.1$ с — шаг дискретизации; $\mathbf{x}_0 = [1, 0, 0, 1]^T$; $\mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(0, 10^{-2}I_2)$; $\mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(0, 10^{-1}I_2)$; $\xi_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$; $\zeta_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$; $\alpha = 10^{-3}$; $\beta = 10^{-2}$.

На рисунке приведены результаты работы алгоритмов 1–4 для $N = 100$, а в таблице — среднее время работы рассмотренных алгоритмов, а также расширенных UD-фильтров eUDCF и eUDIF, построенных в работе [15], по результатам ста экспериментов для $N = 1000$. Программная реализация алгоритмов выполнена в системе MATLAB, численные эксперименты проводились на программно-аппаратной платформе: операционная система — Windows 11, процессор — 11th Gen Intel Core i3-1115G4 @ 3.00 ГГц, 8 ГБ оперативной памяти. Полученные результаты подтверждают эквивалентность построенных алгоритмов стандартным фильтрам, а также показывают более высокую скорость работы расширенных LD-фильтров по сравнению с UD-фильтрами.

Среднее время, с
Mean time, s

CF	IF	eLDCF	eLDIF	eUDCF	eUDIF
0.0180	0.0313	0.1529	0.1682	0.1986	0.2196



Оценки координат (а) и скоростей (б)
Coordinate (a) and velocity (б) estimates

Заключение

Построены новые LD-алгоритмы дискретной фильтрации в ковариационной и информационной форме для дискретных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами. Алгоритмы имеют расширенную блочную форму, позволяющую обновлять все необходимые величины фильтра с использованием численно устойчивой модифицированной взвешенной ортогонализации Грама – Шмидта.

Уравнения алгоритмов фильтрации, построенных на базе MWGS-преобразования, алгебраически эквивалентны уравнениям ковариационного и информационного алгоритмов калмановского типа для линейных дискретных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами. Последнее означает, что эти новые алгоритмы могут быть использованы как надежная вычислительная альтернатива “стандартным алгоритмам”, поскольку они обладают свойством численной устойчивости к ошибкам машинного округления.

Проведенные численные эксперименты показали работоспособность предложенных алгоритмов на примере решения задачи параметрического оценивания модели почти прямолинейного движения, а также выигрыш по времени вычислений с помощью прямой процедуры MWGS-ортогонализации и основанных на ней LD-фильтров по сравнению с обратной процедурой и ранее построенных UD-фильтров на ее основе. Результаты работы могут быть использованы при решении задач обработки измерительной информации в дискретных системах с мультипликативными и аддитивными шумами.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22–21–00387, <https://rscf.ru/project/22-21-00387/>.

Список литературы

- [1] **Grewal M.S., Andrews A.P.** Kalman filtering: theory and practice using MATLAB. 4th edition. John Wiley & Sons; 2015: 640.
- [2] **Цыганова Ю.В., Куликова М.В.** О современных ортогонализированных алгоритмах оптимальной дискретной фильтрации. Вестник ЮУрГУ. Серия Математическое моделирование и программирование. 2018; 11(4):5–30.
- [3] **Björck A.** Solving least squares problems by orthogonalization. BIT. 1967; (7):1–21.
- [4] **Thornton C.L.** Triangular covariance factorizations for Kalman filtering. Ph. D. Thesis. School of Engineering. University of California at Los Angeles; 1976: 214. Available at: <https://ntrl.ntis.gov/NTRL/dashboard/searchResults/titleDetail/N7712115.xhtml>.
- [5] **Bierman G.J.** Factorization methods for discrete sequential estimation. N.Y.: Academic Press; 1977: 256.
- [6] **Gibbs B.P.** Advanced Kalman filtering, least-squares and modeling: a practical handbook. John Wiley & Sons, Inc.; 2011: 632.
- [7] **Grewal M.S., Weill L.R., Andrews A.P.** Global positioning systems, inertial navigation, and integration, 2nd edition. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc.; 2001: 416.
- [8] **Kulikova M.V., Tsyganova J.V.** Numerically robust maximum correntropy criterion Kalman filtering using the UD covariance factorization approach. Proceedings of the 19th European Control Conference (ECC20), May 12–15, 2020. Saint Petersburg, Russia; 2020: 1383–1388.

-
- [9] **Kulikova M.V., Tsyganova J.V., Kulikov G.Yu.** UD-based pairwise and MIMO Kalman-like filtering for estimation of econometric model structures. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2020; 65(10):4472–4479.
- [10] **Tsyganova J.V., Kulikova M.V., Tsyganov A.V.** Some new array information formulations of the UD-based Kalman filter. *Proceedings of the 18th European Control Conference (ECC19)*, June 25–28, 2019. Napoli, Italy; 2019: 1872–1877.
- [11] **Semushin I.V., Tsyganova Yu.V., Tsyganov A.V., Prokhorova E.F.** Numerically efficient UD filter based channel estimation for OFDM wireless communication technology. *Procedia Engineering*. 2017; (201):726–735.
- [12] **Куликова М.В., Цыганова Ю.В.** Численно устойчивые реализации фильтра Калмана для оценивания линейных парных марковских моделей с гауссовым шумом. *Вычислительные технологии*. 2017; 22(3):45–60.
- [13] **Kulikova M.V., Tsyganova J.V., Semushin I.V.** Adaptive wave filtering for marine vessels within UD-based algorithms. *Proceedings of the European Control Conference (ECC16)*, June 29 – July 1, 2016. Aalborg, Denmark; 2016: 807–812.
- [14] **Tsyganova J.V., Kulikova M.V., Tsyganov A.V.** A general approach for designing the MWGS-based information-form Kalman filtering methods. *European Journal of Control*. 2020; (56):86–97.
- [15] **Tsyganov A.V., Tsyganova J.V., Kureneva T.N.** UD-based linear filtering for discretetime systems with multiplicative and additive noises. *Proceedings of the European Control Conference (ECC20)*, May 12–15, 2020. Saint Petersburg, Russia; 2020: 1389–1394.
- [16] **Семущин И.В.** Адаптивные системы фильтрации, управления и обнаружения: коллективная монография. Под ред. проф. И.В. Семущина. Ульяновск: УлГУ; 2011: 298.
- [17] **Цыганова Ю.В., Цыганов А.В.** О вычислении значений производных в LD-разложении параметризованных матриц. *Известия Иркутского государственного университета. Серия “Математика”*. 2018; (23):64–79.
- [18] **Семущин И.В., Цыганова Ю.В., Цыганов А.В.** Применение вспомогательного функционала качества для автоматического контроля оптимальности дискретного фильтра Калмана. *Вычислительные технологии*. 2020; 25(3):77–87. DOI:10.25743/ICT.2020.25.3.009.
- [19] **Itzkowitz H.R., Baheti R.S.** Demonstration of square root Kalman filter on warp parallel computer. *American Control Conference*. 1989: 1754–1762. DOI:10.23919/ACC.1989.4790478.
- [20] **Семущин И.В., Цыганова Ю.В., Цыганов А.В.** Адаптивный LD-фильтр с автоматическим контролем оптимальности по методу вспомогательного функционала качества. XIII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ2019: труды. 17–20 июня 2019 г., Москва. Под общ. ред. Д.А. Новикова. Электрон. текстовые дан. (614 файлов: 217 МБ). М.: ИПУ РАН; 2019: 527–531.
- [21] **Semushin I.V., Tsyganova J.V., Tsyganov A.V.** Numerically efficient LD-computations for the auxiliary performance index based control optimization under uncertainties. *IFAC Papers-Online*. 2018; 51(32):568–573.
- [22] **Голуб Дж., Ван Лоун Ч.** Матричные вычисления. М.: Мир; 1999: 548.
- [23] **Henderson H.V., Searle S.R.** On deriving the inverse of a sum of matrices. *SIAM Review*. 1981; 23(1):53–60.
- [24] **Bar-Shalom Y., Kirubarajan T., Li X.-R.** Estimation with applications to tracking and navigation. John Wiley & Sons, Inc.; 2001: 584.
-

Discrete-time filtering algorithms based on the modified weighted Gram – Schmidt orthogonalization for discrete-time stochastic systems with multiplicative and additive noisesA. V. TSYGANOV^{1,*}, YU. V. TSYGANOVA², A. N. KUVSHINOVA¹, A. V. GOLUBKOV¹¹Ulyanovsk State University of Education, 432071, Ulyanovsk, Russia²Ulyanovsk State University, 432017, Ulyanovsk, Russia*Corresponding author: Andrey V. Tsyganov, e-mail: andrew.tsyganov@gmail.com

Received October 13, 2022, revised December 14, 2022, accepted December 21, 2022.

Abstract

Discrete-time stochastic systems with multiplicative and additive noises describe a wide class of mathematical models of complex systems, for example, industrial-technological, energy, economic, telecommunication, aerospace systems, etc. An important class of algorithms for processing measurement information in complex systems are Kalman-type discrete-time filtering algorithms.

Purpose. Construction of new discrete-time filtering algorithms for discrete-time linear systems with multiplicative and additive noises based on numerically stable modified weighted Gram – Schmidt orthogonalization (MWGS).

Methodology. The methods of computational linear algebra were used, namely, the direct procedure of MWGS-orthogonalization, the theory of Kalman filtering, methods of scientific programming in MATLAB.

Findings. New LD-algorithms for discrete-time filtering in covariance and informational form for discrete-time stochastic systems with multiplicative and additive noises are constructed. The algorithms have an extended array form allowing updates for all necessary filter values. The method employs numerically stable modified weighted Gram – Schmidt orthogonalization. Algebraic equivalence of LD-filters to Kalman-type covariance and informational algorithms for linear discrete-time stochastic systems with multiplicative and additive noises is proved. The conducted numerical experiments have shown the effectiveness of the proposed algorithms using the example of solving the problem of parametric estimation of a model of almost rectilinear motion, as well as their savings in computation time compared to previously constructed UD filters.

Value. New discrete-time filtering LD-algorithms can be used as a reliable computational alternative to the Kalman-type “standard algorithms” since they have the property being numerically stable to machine round-off errors due to the use of the MWGS orthogonalization computational procedure at each iteration of the algorithm. The results can be used to solve problems of measurement information processing in discrete-time systems with multiplicative and additive noise.

Keywords: Kalman filter, discrete-time systems, stochastic systems, multiplicative noise, LD-based discrete filtering.

Citation: Tsyganov A.V., Tsyganova Yu.V., Kuvshinova A.N., Golubkov A.V. Discrete-time filtering algorithms based on the modified weighted Gram – Schmidt orthogonalization for discrete-time stochastic systems with multiplicative and additive noises. Computational Technologies. 2023; 28(5):70–86. DOI:10.25743/ICT.2023.28.5.007. (In Russ.)

Acknowledgements. This work was supported by the Russian Science Foundation, grant no. 22-21-00387, <https://rscf.ru/en/project/22-21-00387/>.

References

1. **Grewal M.S., Andrews A.P.** Kalman filtering: theory and practice using MATLAB. 4th edition. John Wiley & Sons; 2015: 640.
2. **Tsyganova Yu.V., Kulikova M.V.** On modern array algorithms for optimal discrete filtering. Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Universiteta. Seriya Matematicheskoe Modelirovanie i Programirovanie. 2018; 11(4):5–30. DOI:10.14529/mmp180401. (In Russ.)
3. **Björck A.** Solving least squares problems by orthogonalization. BIT. 1967; (7):1–21.
4. **Thornton C.L.** Triangular covariance factorizations for Kalman filtering. Ph. D. Thesis. School of Engineering. University of California at Los Angeles; 1976: 214. Available at: <https://ntrl.ntis.gov/NTRL/dashboard/searchResults/titleDetail/N7712115.xhtml>.
5. **Bierman G.J.** Factorization methods for discrete sequential estimation. N.Y.: Academic Press; 1977: 256.
6. **Gibbs B.P.** Advanced Kalman filtering, least-squares and modeling: a practical handbook. John Wiley & Sons, Inc.; 2011: 632.
7. **Grewal M.S., Weill L.R., Andrews A.P.** Global positioning systems, inertial navigation, and integration, 2nd edition. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc.; 2001: 416.
8. **Kulikova M.V., Tsyganova J.V.** Numerically robust maximum correntropy criterion Kalman filtering using the UD covariance factorization approach. Proceedings of the 19th European Control Conference (ECC20), May 12–15, 2020. Saint Petersburg, Russia; 2020: 1383–1388.
9. **Kulikova M.V., Tsyganova J.V., Kulikov G.Yu.** UD-based pairwise and MIMO Kalman-like filtering for estimation of econometric model structures. IEEE Transactions on Automatic Control. 2020; 65(10):4472–4479.
10. **Tsyganova J.V., Kulikova M.V., Tsyganov A.V.** Some new array information formulations of the UD-based Kalman filter. Proceedings of the 18th European Control Conference (ECC19), June 25–28, 2019. Napoli, Italy; 2019: 1872–1877.
11. **Semushin I.V., Tsyganova Yu.V., Tsyganov A.V., Prokhorova E.F.** Numerically efficient UD filter based channel estimation for OFDM wireless communication technology. Procedia Engineering. 2017; (201):726–735.
12. **Kulikova M.V., Tsyganova J.V.** Numerically stable Kalman filter implementations for estimating linear pairwise Markov models in the presence of Gaussian noise. Computational Technologies. 2017; 22(3):45–60. (In Russ.)
13. **Kulikova M.V., Tsyganova J.V., Semushin I.V.** Adaptive wave filtering for marine vessels within UD-based algorithms. Proceedings of the European Control Conference (ECC16), June 29 – July 1, 2016. Aalborg, Denmark; 2016: 807–812.
14. **Tsyganova J.V., Kulikova M.V., Tsyganov A.V.** A general approach for designing the MWGS-based information-form Kalman filtering methods. European Journal of Control. 2020; (56):86–97.
15. **Tsyganov A.V., Tsyganova J.V., Kureneva T.N.** UD-based linear filtering for discretetime systems with multiplicative and additive noises. Proceedings of the European Control Conference (ECC20), May 12–15, 2020. Saint Petersburg, Russia; 2020: 1389–1394.
16. **Semushin I.V.** Adaptivnye sistemy fil'tratsii, upravleniya i obnaruzheniya: kollektivnaya monografiya [Adaptive systems of filtering, control and fault detection]. Ulyanovsk: UIGU; 2011: 298. (In Russ.)
17. **Tsyganova Yu.V., Tsyganov A.V.** On the computation of derivatives within LD factorization of parametrized matrices. The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2018; (23):64–79. (In Russ.)
18. **Semushin I.V., Tsyganova Yu.V., Tsyganov A.V.** Application of the auxiliary performance index for automatic optimality control of discrete Kalman filter. Computational Technologies. 2020; 25(3):77–87. DOI:10.25743/ICT.2020.25.3.009. (In Russ.)
19. **Itzkowitz H.R., Baheti R.S.** Demonstration of square root Kalman filter on warp parallel computer. American Control Conference. 1989: 1754–1762. DOI:10.23919/ACC.1989.4790478.
20. **Semushin I.V., Tsyganova Yu.V., Tsyganov A.V.** Adaptive LD-filter with automatic optimality control by the method of auxiliary performance index. Proceedings of the XIII All-russian Meeting on Control Problems VSPU2019: Proceedings. June 17–20, 2019. Moscow / Ed. by D.A. Novikov. Electronic text data (614 files: 217 Mb). Moscow: ICS RAS; 2019: 527–531. (In Russ.)

21. **Semushin I.V., Tsyganova J.V., Tsyganov A.V.** Numerically efficient LD-computations for the auxiliary performance index based control optimization under uncertainties. IFAC Papers-Online. 2018; 51(32):568–573.
22. **Golub G., Van Loan Ch.** Matrix Computations. JHU Press; 1996: 694.
23. **Henderson H.V., Searle S.R.** On deriving the inverse of a sum of matrices. SIAM Review. 1981; 23(1):53–60.
24. **Bar-Shalom Y., Kirubarajan T., Li X.-R.** Estimation with applications to tracking and navigation. John Wiley & Sons, Inc.; 2001: 584.